Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Mathématiques : analyse et approches
Niveau supérieur
Épreuve 3

Jeudi 12 mai 2022 (matin)

1 heure

Instructions destinées aux candidats

- N'ouvrez pas cette épreuve avant d'y être autorisé(e).
- Une calculatrice à écran graphique est nécessaire pour cette épreuve.
- Répondez à toutes les questions sur le livret de réponses prévu à cet effet.
- Sauf indication contraire dans l'intitulé de la question, toutes les réponses numériques devront être exactes ou correctes à trois chiffres significatifs près.
- Un exemplaire non annoté du **livret de formules pour les cours de mathématiques : analyse et approches** est nécessaire pour cette épreuve.
- Le nombre maximum de points pour cette épreuve d'examen est de **[55 points]**.

2222 – 7118

Répondez à **toutes** les questions sur le livret de réponses fourni. Veuillez répondre à chaque question sur une nouvelle page. Le total des points ne sera pas nécessairement attribué pour une réponse correcte si le raisonnement n'a pas été indiqué. Les réponses doivent être appuyées par un raisonnement et/ou des explications. Les solutions obtenues à l'aide d'une calculatrice à écran graphique doivent être accompagnées d'un raisonnement adéquat. Par exemple, si des représentations graphiques sont utilisées pour trouver la solution, veuillez inclure une esquisse de ces représentations graphiques dans votre réponse. Lorsque la réponse est fausse, certains points peuvent être attribués si la méthode utilisée est correcte, pour autant que le raisonnement soit indiqué par écrit. On vous recommande donc de montrer tout votre raisonnement.

1. [Note maximale : 28]

Cette question vous demande d'explorer certaines propriétés d'une famille de courbes du type $y^2 = x^3 + ax + b$ pour diverses valeurs de a et b, où $a, b \in \mathbb{N}$.

(a) Sur le même système d'axes, esquissez les courbes suivantes pour $-2 \le x \le 2$ et $-2 \le y \le 2$, en indiquant clairement tout point d'intersection avec les axes.

(i) $y^2 = x^3,\ x \ge 0$ [2]

(ii) $y^2 = x^3 + 1,\ x \ge -1$ [2]

(b) (i) Écrivez les coordonnées des deux points d'inflexion sur la courbe $y^2 = x^3 + 1$. [1]

(ii) En considérant chaque courbe de la partie (a), identifiez deux caractéristiques principales qui permettraient de distinguer une courbe de l'autre. [1]

Maintenant, considérez les courbes de la forme $y^2 = x^3 + b$, pour $x \ge -\sqrt[3]{b}$, où $b \in \mathbb{Z}^+$.

(c) En faisant varier la valeur de b, suggérez deux caractéristiques principales communes à toutes ces courbes. [2]

Ensuite, considérez la courbe $y^2 = x^3 + x,\ x \ge 0$.

(d) (i) Montrez que $\dfrac{dy}{dx} = \pm\dfrac{3x^2 + 1}{2\sqrt{x^3 + x}}$, pour $x > 0$. [3]

(ii) À partir de là, déduisez que la courbe $y^2 = x^3 + x$ n'a ni de minimum relatif ni de maximum relatif. [1]

La courbe $y^2 = x^3 + x$ a deux points d'inflexion. Étant donné la symétrie de la courbe, ces points ont la même abscisse.

(e) Trouvez la valeur de cette abscisse, en donnant votre réponse sous la forme $x = \sqrt{\dfrac{p\sqrt{3} + q}{r}}$, où $p,\ q,\ r \in \mathbb{Z}$. [7]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 1)

$P(x, y)$ est défini comme étant un point rationnel sur une courbe si x et y sont des nombres rationnels.

La tangente à la courbe $y^2 = x^3 + ax + b$ à un point rationnel P coupe la courbe en un autre point rationnel Q.

Soit C la courbe $y^2 = x^3 + 2$, pour $x \geq -\sqrt[3]{2}$. Le point rationnel $P(-1\ ;\ -1)$ se situe sur C.

(f) (i) Trouvez l'équation de la tangente à C au point P. [2]

(ii) À partir de là, trouvez les coordonnées du point rationnel Q où cette tangente coupe C, en exprimant chaque coordonnée sous forme de fraction. [2]

(g) Le point $S(-1\ ;\ 1)$ se situe également sur C. La droite $[QS]$ coupe C en un autre point. Déterminez les coordonnées de ce point. [5]

2. [Note maximale : 27]

Cette question vous demande d'explorer les conditions d'existence des racines complexes pour des équations polynomiales de degré 3 et 4.

L'équation cubique $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, où p, q, $r \in \mathbb{R}$, possède les racines α, β et γ.

(a) En développant $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$, montrez que :

$$p = -(\alpha + \beta + \gamma)$$

$$q = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$$

$$r = -\alpha\beta\gamma.$$ [3]

(b) (i) Montrez que $p^2 - 2q = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$. [3]

(ii) À partir de là, montrez que $(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2 = 2p^2 - 6q$. [3]

(c) Sachant que $p^2 < 3q$, déduisez que α, β et γ ne peuvent pas être réelles. [2]

Considérez l'équation $x^3 - 7x^2 + qx + 1 = 0$, où $q \in \mathbb{R}$.

(d) En utilisant le résultat de la partie (c), montrez que lorsque $q = 17$, cette équation possède au moins une racine complexe. [2]

Noah croit que si $p^2 \geq 3q$, alors α, β et γ sont toutes réelles.

(e) (i) En faisant varier la valeur de q dans l'équation $x^3 - 7x^2 + qx + 1 = 0$, déterminez la plus petite valeur entière positive de q nécessaire pour montrer que Noah se trompe. [2]

(ii) Expliquez pourquoi l'équation aura au moins une racine réelle pour toutes les valeurs de q. [1]

(Suite de la question à la page suivante)

(Suite de la question 2)

Considérez maintenant les équations polynomiales de degré 4.

L’équation $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$, où p, q, r, $s \in \mathbb{R}$, possède les racines α, β, γ et δ.

D’une façon similaire à l’équation cubique, il est possible de démontrer que :

$$p = -(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$$

$$q = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta$$

$$r = -(\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta)$$

$$s = \alpha\beta\gamma\delta.$$

(f) (i) Trouvez une expression pour $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$ en fonction de p et q. [3]

(ii) À partir de là, indiquez une condition, en fonction de p et q, qui impliquerait que $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ possède au moins une racine complexe. [1]

(g) Utilisez votre résultat de la partie (f)(ii) pour montrer que l’équation $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5 = 0$ possède au moins une racine complexe. [1]

L’équation $x^4 - 9x^3 + 24x^2 + 22x - 12 = 0$ possède une racine entière.

(h) (i) Indiquez ce que le résultat de la partie (f)(ii) vous dit lorsque vous considérez l’équation $x^4 - 9x^3 + 24x^2 + 22x - 12 = 0$. [1]

(ii) Écrivez la racine entière de cette équation. [1]

(iii) En écrivant $x^4 - 9x^3 + 24x^2 + 22x - 12$ comme le produit d’un facteur linéaire et d’un facteur cubique, prouvez que l’équation possède au moins une racine complexe. [4]

Références :